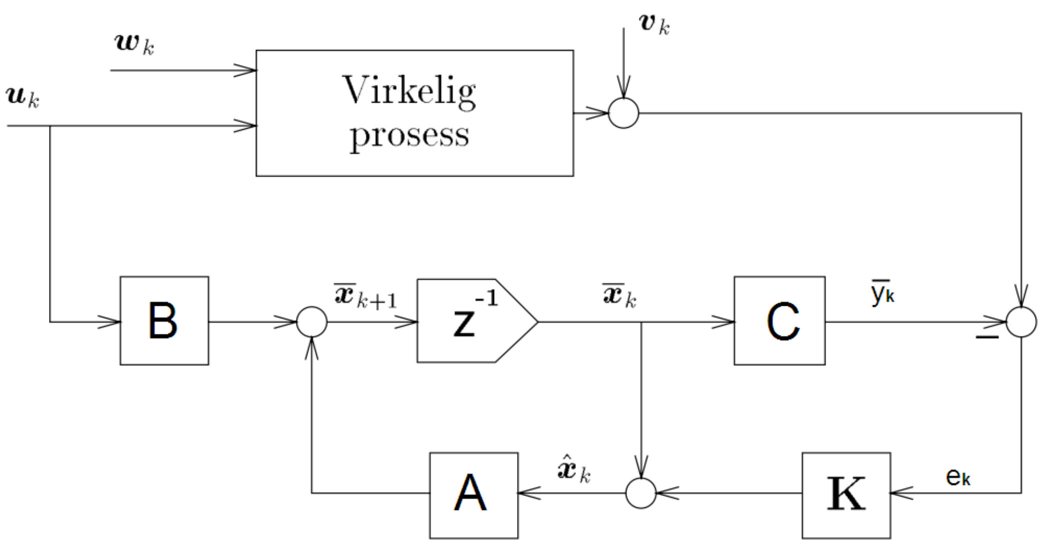
University College of Southeast Norway

Exercises

Tilstandsestimering – Oppgaver

HANS-PETTER HALVORSEN



http://home.hit.no/~hansha

Innholdsfortegnelse

1 Grunnlag

Her er noen utvalgte oppgaver ifm den teoretiske bakgrunnen til tilstandsestimatorer som Kalmanfilter og Observer.

1.1 Statistikk og Stokastiske systemer

Task 1: Middelverdi/Gjennomsnitt:

1. Forklar begrepet middelverdi og sett opp uttrykket for middelverdien

2. Finn middelverdien for følgende:

Gitt følgende datasett: $2.2, 4.5, 6.2, 3.6, 2.6$

3. Sjekk svaret vha MathScript og LabVIEW

[End of Task]

Task 2: Forventningsverdi

1. Forklar begrepet forventingsverdi

[End of Task]

Task 3: Varians

1. Forklar begrepet varians

2. Finn variansen for følgende:

Gitt følgende datasett: $2.2, 4.5, 6.2, 3.6, 2.6$

3 Sjekk svaret vha MathScript og LabVIEW

[End of Task]

Task 4: Standardavvik

1 Forklar begrepet standardavvik

2 Finn standardavviket for følgende:

Gitt følgende datasett: $2.2, 4.5, 6.2, 3.6, 2.6$

3 Sjekk svaret vha MathScript og LabVIEW

[End of Task]

Task 5: Farget og Hvit støy

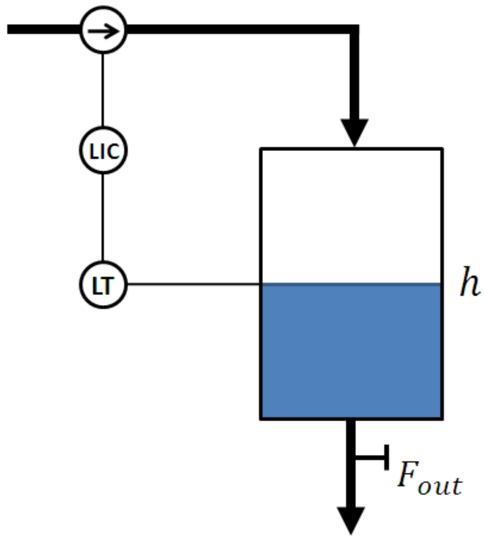
1 Forklar hva vi mener med farget og hvit støy

[End of Task]

1.2 Foroverkobling

Task 6: Foroverkobling

Vi ønsker å forbedre reguleringen av en vanntank, dvs. regulere nivået h i en vanntanken. Vi måler nivået h i tanken og bruker en vanlig PID regulator til å regulere nivået (bildet til venstre). Det renner vann ut fra tanken i bunnen F_{out} som kan betraktes som en forstyrrelse og som gjør det vanskeligere å regulere nivået.



Matematisk modell for systemet:

$$A_t \dot{h} = K_p u - F_{out}$$

der A_t er arealet i tanken, K_p er pumpeforsterkning, u er pådraget, h er nivået i tanken, F_{out} er utstømningen fra tanken.

Vi ønsker å forbedre reguleringen av nivået ved å innføre en foroverkobling fra forstyrrelsen F_{out}, se figur til høyre. Problemet er at vi med dagens prosess ikke måler utstrømningen F_{out}, dermed ønsker vi å estimere denne, slik at dette estimatet kan inngå i reguleringen.

1. Tegn en skisse av reguleringssystemet med tilbakekobling og foroverkobling

2. Design regulatoren som skal brukes i foroverkoblingen.

[End of Task]

1.3 Matriser

Task 7: Determinant

1. Finn determinanten til følgende matrise (penn og papir):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Vis hvordan dette gjøres i MathScript

3 Finn determinanten til følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

4 Vis hvordan dette gjøres i MathScript

[End of Task]

Task 8: Egenverdier

Gitt en matrise A.

1 Sett opp formelen for å finne egenverdiene til A

2 Sett opp den karakteristiske likning

3 Sett opp det karakteristiske polynom

[End of Task]

Task 9: Egenverdier – 2.ordens system

1 Finn egenverdiene til følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2 Bruk MathScript for å verifisere svaret ditt

3 Finn egenverdiene til følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4 Bruk MathScript for å verifisere svaret ditt.

[End of Task]

Task 10: Egenverdier – 3.ordens system

1 Finn egenverdiene til følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

2 Bruk MathScript for å verifisere svaret ditt.

[End of Task]

1.4 Observerbarhet

Task 11: Utledning av Observerbarhetsmatrisen

1 Utled uttrykket for Observerbarhetsmatrisen

[End of Task]

Task 12: Finn Observerbarhetsmatrisen

1 Finn Observerbarhetsmatrisen for følgende system:

$$x_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} x_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} u_k$$

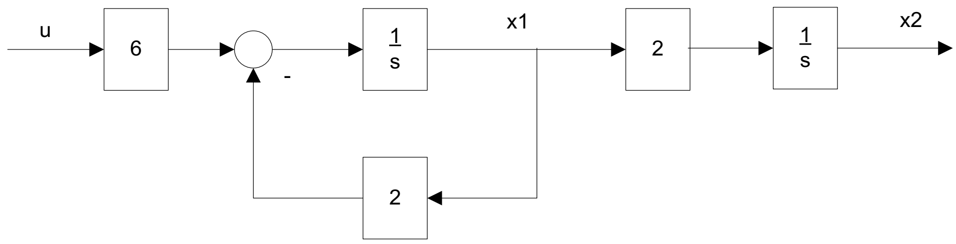
$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u_k$$

2 Vis hvordan dette gjøres i MathScript

[End of Task]

Task 13: Observerbarhet

Gitt følgende blokkdiagram:



Sjekk om systemet er Observerbart. Sett $x_2 = y$

Bruk MathScript for å gjøre det samme

[End of Task]

1.5 Tilstandsrommodeller

Task 14: Tilstandsrommodell

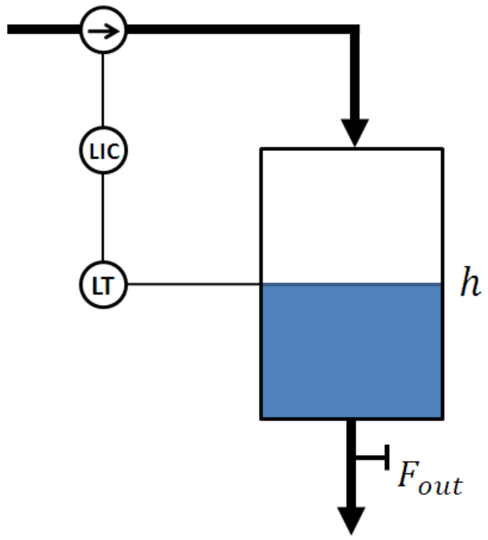
Gitt følgende system:

$$A_t \dot{h} = K_p u - F_{out}$$

eller

$$\dot{h} = \frac{1}{A_t}[K_p u - F_{out}]$$

der A_t er arealet i tanken, K_p er pumpeforsterkning, u er pådraget, h er nivået i tanken, F_{out} er utstømningen fra tanken.



For det virkelige systemet blir kun nivået (h) målt, så vi ønsker å benytte et Kalman Filter for estimering av utstømningen (F_{out}).

En generell tilstandsrommodell kan skrives:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Vi setter

$x_1 = h = y$ og $x_2 = F_{out}$

Vi antar at F_{out} er konstant, dvs., $\dot{F}_{out} = 0$

1 Finn tilstandsrommodellen for systemet Finn matrisene $\boldsymbol{A, B, C \ og \ D}$ i tilstandsrommodellen.

2 Sjekk om systemet er Observerbart.

3 Implementer modellen i MathScript/LabVIEW. Sjekk om systemet er Observerbart.

Bruk $K_p = 16.5cm^3/s$ og $A_t = 78.5\text{cm}^2$

[End of Task]

Task 15: Diskretisering

I forrige oppgave fant vi en kontinuerlig tilstandsrommodell av en vanntank.

1. Finn den diskrete lineære tilstandsrommodellen på følgende form:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

Bruk **Euler Forover**

$$\dot{x} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{T_s}$$

hvor T_s er samplingstiden.

Finn matrisene $A, B, C\ og\ D$.

2. Bruk MathScript/LabVIEW for å verifisere svaret ditt. Sett $T_s = 0.1$.

3. Sjekk om det diskrete systemet er Observerbart

[End of Task]

1.6 Modellbasert PID tuning

Task 16: Skogestad's metode

1. Forklar Skogestad's metode for å finne PID parametrene i en PID regulator.

Ta utgangspunkt i at prosessen er gitt ved følgende modell:

$$H = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s}$$

[End of Task]

2 Kalmanfilter

Her er noen utvalgte oppgaver ifm bruk av Kalmanfilter som tilstandsestimator.

2.1 Innledning

Task 17: Hva er et Kalmanfilter?

1. Hva er et Kalmanfilter? Gi en overordnet beskrivelse. Tegn og forklar.

[End of Task]

Task 18: Estimator - Kalmanfilter

1. Sett opp de matematiske likningene for prosessen (systemet) og estimatoren.

2. På bakgrunn av disse likningene sett opp et blokkdiagram. Forklar blokkdiagrammet.

[End of Task]

Task 19: Optimal Estimator

1. Tegn og forklar hvorfor Kalmanfilteret betegnes som en optimal estimator?

[End of Task]

Task 20: Testing av Kalmanfilter

Det lønner seg å teste ut Kalmanfilteret på en simulert prosess før du tar det i bruk på den virkelige prosessen. Du kan bruke f.eks. bruke LabVIEW, MATLAB eller andre simulerings- og programmeringsspråk.

1. Forklar hvordan du vil teste dette

[End of Task]

Task 21: Observerbarhet

En nødvendig betingelse for at Kalmanfilteret skal virke ordentlig er at systemet er observerbart. Forklar dette begrepet og sett opp Observerbarhetsmatrisen.

[End of Task]

Task 22: Kovariansmatrisene Q og R

Forklar disse kovariansmatrisene Q og R.

[End of Task]

Task 23: Tuning av Kalmanfilteret

Forklar hvordan du kan bruke Q og R til å ”tune” Kalmanfilteret.

[End of Task]

Task 24: Stasjonær Kalmanfilter forsterkning

Hva menes med den stasjonære Kamanfilter forsterkningen?

Hva slags informasjon er nødvendig for å finne/beregne den stasjonære Kalmanfilter forsterkningen?

[End of Task]

2.2 Kalmanfilter algoritmer

Task 25: Den generelle Kalmanfilter algoritmen

Sett opp de forskjellige stegene i Kalmanfilter-algoritmen og tegn et blokkdigram. Forklar blokkdiagrammet.

[End of Task]

Task 26: Ulike typer algoritmer

Nevn 2 forskjellige Kalmanfilter-algoritmer og hva som er forskjellen på disse? Tegn blokkdiagram for disse.

[End of Task]

Task 27: Kalmanfilter-algoritmen for gitt system

Gitt følgende system:

$$\dot{x}_1 = K_p u - x_2$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

$$y = x_1$$

hvor K_p er pumpeforsterkningen

Sett systemet opp på formen:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Lag en diskret versjon av systemet vha Euler forover.

$$\dot{x} \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{T_s}$$

Du kan også sette det diskrete systemet opp på formen:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

Sjekk svaret vha LabVIEW.

3 Sjekk om systemet er observerbart (penn og papir).

4 Sett opp likningene i Kalmanfilter-algoritmen for dette systemet.

Den generelle algoritmen er som følger:

Steg 1: Finn måleestimatet

$$\bar{y}_k = g(\bar{x}_k, u_k)$$

Steg 2: Finn estimator-avviket

$$e_k = y_k - \bar{y}_k$$

Steg 3: Finn det korrigerte tilstandsestimatet

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + Ke_k$$

Steg 4: Finn det predikerte (fremtidige) tilstandsestimatet

$$\bar{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k, u_k)$$

5 Finn den statiske Kalman forsterkningen (K_s) vha LabVIEW. Sjekk også om systemet er observerbart (i LabVIEW).

Du kan bruke følgende kovariansmatriser:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, R = 0.01$$

Tips! Følgende funksjoner i LabVIEW er kjekke å bruke:

- "CD Contruct State-Space Model.vi"
- "CD Convert Continuous to Discrete.vi"
- "CD Observability Matrix.vi"
- "CD Kalman Gain.vi"

Du kan også bruke følgende:

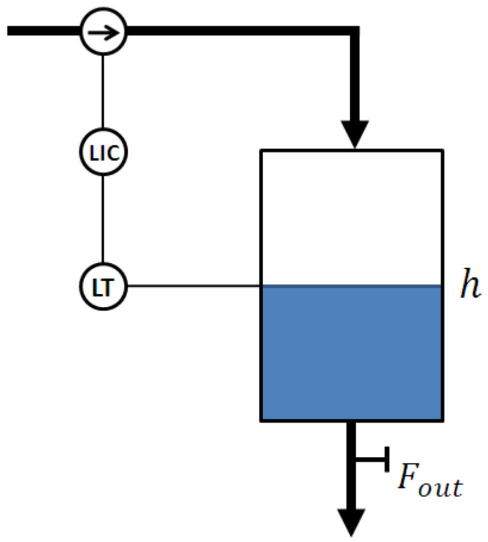
$$K_p = 1$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[End of Task]

Task 28: Kalmanfilter-algoritmen for vanntanken

Sett opp likningene i Kalmanfilter-algoritmen for vanntanken basert på det diskrete systemet funnet i en tidligere oppgave.



Systemet er gitt ved:

$$x_1(k+1) = x_1(k) - \frac{T_s}{A_t} x_2(k) + \frac{T_s K_p}{A_t} u(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

Den generelle algoritmen er som følger:

Steg 1: Finn måleestimatet

$$\bar{y}_k = g(\bar{x}_k, u_k)$$

Steg 2: Finn estimator-avviket

$$e_k = y_k - \bar{y}_k$$

Steg 3: Finn det korrigerte tilstandsestimatet

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K e_k$$

Steg 4: Finn det predikerte (fremtidige) tilstandsestimatet

$$\bar{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k, u_k)$$

[End of Task]

Task 29: Dynamisk system

Gitt følgende system:

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 + bu$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

$$y = x_1 + c x_2$$

1. Tegn et blokkdiagram for systemet

2. Finn Observerbarhetsmatrisen for systemet.

3. Sjekk om systemet er Observerbart. Sett $a_1 = 5, a_2 = 2, b = 1, c = 1$

Kontroller svaret vha MathScript

4. Lag en diskret versjon av systemet vha Euler forover.

$$\dot{x} \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{T_s}$$

5. Bruk MathScript/LabVIEW for å verifisere svaret ditt. Sett $T_s = 0.1$.

6. Sett opp likningene i Kalmanfilter-algoritmen for dette systemet.

Den generelle algoritmen er som følger:

Steg 1: Finn måleestimatet

$$\bar{y}_k = g(\bar{x}_k, u_k)$$

Steg 2: Finn estimator-avviket

$$e_k = y_k - \bar{y}_k$$

Steg 3: Finn det korrigerte tilstandsestimatet

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + Ke_k$$

Steg 4: Finn det predikerte (fremtidige) tilstandsestimatet

$$\bar{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k, u_k)$$

[End of Task]

3 Observer

Her er noen utvalgte oppgaver ifm bruka av Observer som tilstandsestimator.

Task 30: Observer

❶ Forklar prinsippene for en Observer.

[End of Task]

Task 31: Alternativer - Observers

❶ Fordeler/ulemper Kalmanfilter/"Observers"?

[End of Task]

Task 32: Butterworth polynom – 2. orden

En enkel måte å finne egenverdiene på er å bruke **Butterworth** egenverdiene fra Butterworth polynomet.

Gitt:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

❶ Finn Observerforsterkningsmatrisen K (penn og papir).

❷ Bruk MathScript og Ackerman (funksjonen heter acker()) og finn Observerforsterkningsmatrisen K vha denne. Sammenlign resultatet med dine utregninger.

[End of Task]

Task 33: Butterworth polynom – 3. orden

En enkel måte å finne egenverdiene på er å bruke **Butterworth** egenverdiene fra Butterworth polynomet.

Gitt:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

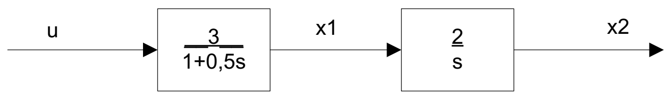
Bruk et 3.ordens Butterworth filter og finn $\boldsymbol{K}$ (penn og papir).

Bruk MathScript og Ackerman (funksjonen heter acker()) og finn Observerforsterkningsmatrisen K vha denne. Sammenlign resultatet med dine utregninger.

[End of Task]

Task 34: Blokkdiagram

Gitt følgende system:



Finn tilstandsrommodellen til systemet

Tips! Konverter systemet til en tilstandsrommodell på formen:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Tip! Bruk **Inverse Laplace**.

Sett $x_2 = y$

Sjekk om systemet er Observerbart (penn og papir). Kontroller svaret vha MathScript.

Lag en diskret versjon av systemet vha Euler forover.

$$\dot{x} \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{T_s}$$

Sett opp likningene som inngår i Observeren basert på dette systemet.

[End of Task]

Hans-Petter Halvorsen, M.Sc.

E-mail: hans.p.halvorsen@hit.no

Blog: http://home.hit.no/~hansha/

University College of Southeast Norway

www.usn.no